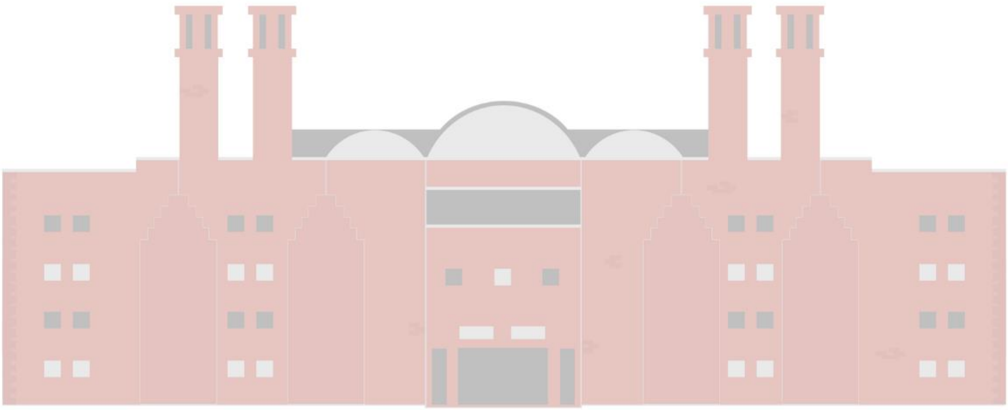
قسم هندسة الحواسيب والأتمتة

السنة الثانية / الفصل الأول

التحليل العددي

المحاضرة الثالثة

6 صفحات



الدكتور: عماد فتاش

التاريخ: ٢٠١٤/١٠/١٥

مثال : إيجاد كثير الحدود لاغرانج من الدرجة الثانية

x_1	2	2.5	4
$f(x)$	0.5	0.4	0.25

$$p_2(x) = 0{,}05x^2 - 0{,}425x + 1{,}15$$
$$p_2(x = 3) = 0{,}325$$
$$f(3) \approx p_2(3) = 0{,}325 \quad , f(x) = \frac{1}{x}$$

حساب الخطأ يكون على الشكل:

$$E(3) = f(3) - p_2(3)$$

حيث قانون حساب الخطأ لنقطة x^* يكون من الشكل $E(x^*) = f(x^*) - p(x^*)$

تقييم الخطأ بطريقة لاغرنج

اذا كان لدينا تابع $f(x)$ مستمر حتى النقطة n+1

و نفرض لدينا x^* قيمة ما فيكون لدينا الحد الأعلى للخطأ هو :

$$e(x^*) \le \frac{m.|w(x^*)|}{(n+1)!}$$

حيث ان مكونات التقييم هي التالي :

$$\mathrm{w}(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$$

حيث m هي قيم للمرتبة n+1 للتابع f على المجال المعطى :

$$m = max_{x_0 \le m \le x_n} \left| f^{(n+1)}(m) \right|$$

سنطبق على التمرين السابق علما ان التابع يعطى بالعلاقة $f(x) = \frac{1}{x}$

نقوم باشتقاق التابع ..

$$\acute{f}(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$\acute{\acute{\acute{f}}}(x) = -\frac{6}{x^4}$$

نعوض بالتابع $w(x^*)$ باعتبار أن $x^* = 3$

$$w(x^* = 3) = (3-2)(3-2{,}5)(3-4) = 0.5$$

لحساي m نأخذ أكبر قيمة للمشتق الثالث للتابع و يكون أكبر ما يمكن عندما يكون مقامه أصغر ما يمكن و لذلك سنأخذ اصغر x خلال التعويض و سيكون حد الخطأ عند النقطة ٣ :

$$m = max_{2 \le m \le 4} \left| \acute{\acute{\acute{f}}}(x) \right| = \left| -\frac{6}{x^4} \right| = \frac{6}{16}$$

$$e(x^* = 3) \le \frac{\left(\frac{6}{16}\right).(0.5)}{3!} = 0.03125$$

الاستيفاء بطريقة نيوتن :

كثير حدود نيوتن

ليكن لدينا مجموعة النقاط $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^{n}$ نقاط ارتكاز ، يكون كثير الحدود نيوتن من الشكل :

عند الدرجة الأولى $p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$

عند الدرجة الثانية :$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$

عند الدرجة n :

$$\boldsymbol{p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)..(x - x_{n_{-1}})}$$

و هدفنا هنا أن نجد الثوابت : $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$

كل كثير حدود يعبر عن كثير الحدود الذي قبله و نعبر عن ذلك بالعبارة العودية التالية :

$$p_{k_{+1}}(x) = p_k(x) + a_{k_{+1}}(x - x_0)(x - x_1)\ldots.(x - x_k)$$
$$: k = 0,1,2,34, \ldots.., n - 1$$

علما ان :

$$p_0(x) = a_0$$

اذا كان لدينا $y = f(x) \ , \ \{(x_k, y_k)\}_{k=0}^{n}$

$$y_i = f(x_i) = p_n(x_i)$$
$$i = 0,1,2,3, \ldots, n$$

إيجاد كثير الحدود نيوتن $p_n(x)$

الشكل العام من الدرجة الأولى : $p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$

عند التعويض بـ x_0 : $p_1(x_0) = a_0 + a_1(x_0 - x_0) = f(x_0)$

عند التعويض بـ x_1 :

$$f(x_1) = p_1(x_1) = a_0 + a_1(x - x_0) \rightarrow a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

الشكل العام لكثير الحدود من الدرجة الثانية :

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

عند التعويض بـ x_2

$$p_2(x_2) = f(x_2) = f(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

و لدينا $a_0 = f(x_0)$ معلومة و $a_1 = f(x_1)$ تم استنتاجها سابقا فإن a_2 تساوي:

$$a_2 = \left\{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right\} / (x, x_0)$$

فروق القسمة :

$$f[x_k] = f(x_k)$$

الحالة العامة لفروق القسمة من الشكل الثنائي :

$$f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_k] - f[x_{k_{-1}}]}{x_k - x_{k_{-1}}}$$

$$a_0 = f[x_0] = f(x_0) \; , \; f[x_1] = f(x_1)$$

$$a_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

نفرض فروق جديدة :

$$f[x_k] = f(x_k)$$

$$f[x_{k_{-1}}, x_k] = \frac{f[x_k] - f[x_{k_{-1}}]}{x_k - x_{k_{-1}}}$$

سنقوم باستنتاج المقدار التالي من الفروق السابقة .

الشكل العام لفروق القسمة من الشكل الثلاثي :

$$F[x_{k-2}, x_{k-1}, \mathrm{x_k}] = \frac{\mathrm{f}[\mathrm{x}_{k-1}, \mathrm{x}_k] - \mathrm{f}[\mathrm{x}_{k-2}, \mathrm{x}_{k-1}]}{x_k - x_{k-2}}$$

الشكل العام لفروق القسمة من الشكل الرابع :

$$F[\, x_{k-3}\, , x_{k-2}, x_{k-1}, \mathrm{x_k}] = \frac{\mathrm{f}[\mathrm{x}_{k-2}, x_{k-1}, \mathrm{x}_k] - \mathrm{f}[x_{k-3}\, , x_{k-2}, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-3}}$$

وتعطى الحالة العامة بالشكل:

$$\mathrm{f}[\mathrm{x}_{k-j}, \mathrm{x}_{k-j+1}, \dots, \mathrm{x}_k\,] = \frac{\{f[x_{k-j+1}, \dots, x_k] - f[\mathrm{x}_{k-j}, \mathrm{x}_{k-j+1}, \dots, \mathrm{x}_{k-1}\}}{x_k - x_{k-j}}$$

جدول فروق القسمة :

$\mathrm{x_k}$	$f(x_k)$	$F[x_k]$	F[,]	F[, ,]	F[, , ,]
x_0	$f(x_0)$	$F[X_0]$	$\Rightarrow= a_0$		
x_1	$f(x_1)$	$F[X_1]$	$F[X_0, X_1]$	$\Rightarrow= a_1$	
x_2	$f(x_2)$	$F[X_2]$	$F[X_1, X_2]$	$F[X_0, X_1, X_2]$	$\Rightarrow= a_2$
x_3	$f(x_3)$	$F[X_3]$	$F[X_2, X_3]$	$F[X_1, X_2, X_3]$	$F[X_0, X_1, X_2, X_3]$
x_4	$f(x_4)$	$F[X_4]$	$F[X_3, X_4]$	$F[X_2, X_3, X_4]$	$F[X_1, X_2, X_3, X_4]$

ملاحظة : إن عناصر القطر الرئيسي في جدول فروق القسمة تمثل أمثال كثيرات حدود نيوتن الموافقة للنقاط المعطاة

أمثال كثير حدود نيوتن يعطى بالعلاقة التالية :

$$\begin{Bmatrix} a_j = f[x_0, x_1, x_2, \dots \dots, x_j] \\ j = 0,1,2, \dots \dots \dots, n \end{Bmatrix}$$

x_k	$F[x_k]$	F[,]	F[, ,]	F[, , ,]	F[, , , ,]	F[, , , , ,]
$x_0=1$	-3					
$x_1=2$	0	3				
$x_2=3$	15	15	6			
$x_3=4$	48	33	9	1		
$x_4=5$	105	57	12	1	0	
$x_5=6$	192	87	15	1s	0	0

$$a_0 = f[x_0] \ , a_1 = f[x_0, x_1] \ , a_2 = f[x_0, x_1, x_2], \dots \dots \dots ..$$

$$p_5(x) = p_4(x) = p_3(x)$$
$$= -3 + 3(x-1) + 6(x-1)(x-2) + (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$p_1(x) = -3 + 3(x-1)$$

$$p_2(x) = -3 + 3(x-1) + 6(x-1)(x-2)$$

إن الحياة لا تعاقبك... أنت تفعل ذلك لنفسك بأفكارك السلبية